Pregled teorije vjerovatnoće II

TELEKOMUNIKACIONE MREŽE

ELEKETROTEHNIČKI FAKULTET PODGORICA

Sadržaj

- Funkcija raspodjele slučajne promjenjive (CDF)
- Funkcija gustine vjerovatnoće (PDF)
- Združena funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće
- Uslovna funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće
- CDF i PDF sume slučajnih promjenjivih
- CDF i PDF maksimuma i minimuma slučajnih promjenjiih
- Poređenje slučajnih promjenjivih
- Momenti slučajne promjenjive
- Funkcija generisanja vjerovatnoće

Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

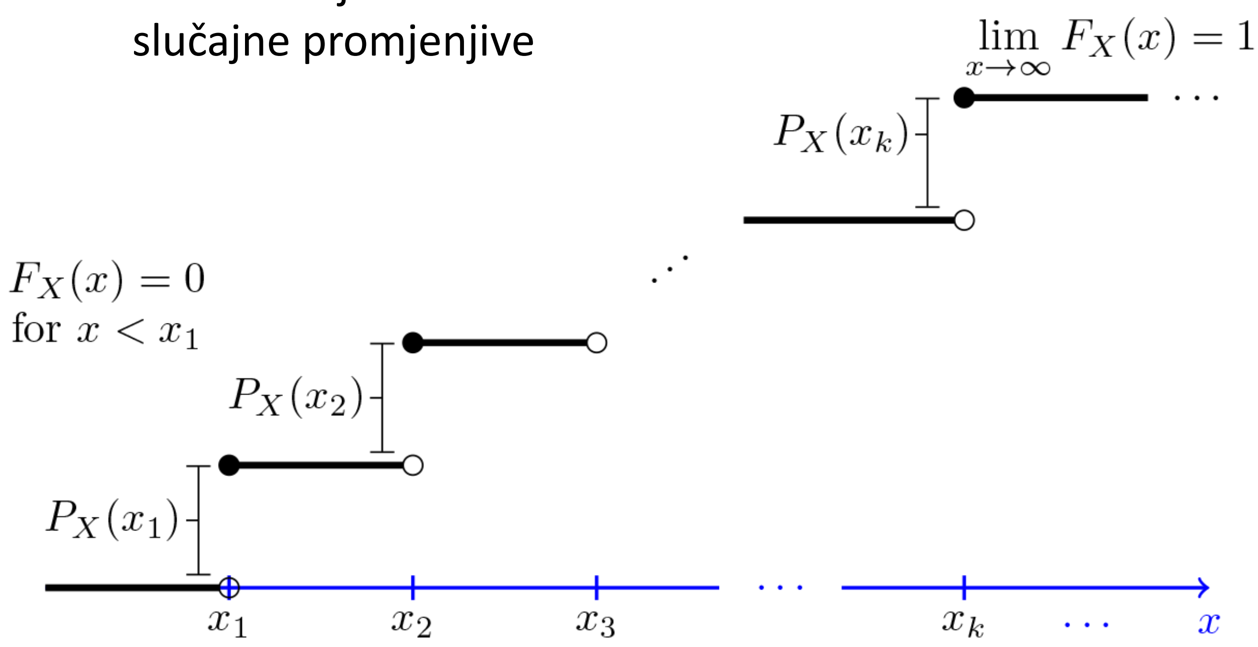
$$F_X(x) = p(X \le x)$$

- $0 \le F_X(x) \le 1$
- bezdimenziona veličina
- $F_X(x)$ je neopadajuća funkcija
- $F_X(x)$ teži 1 kada x teži $+\infty$, odnosno 0 kada x teži $-\infty$
- $F_X(x)$ je kontinualna funkcija: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$
- Za diskretnu slučajnu promjenljivu $F_X(x)$ je stepeničasta funkcija sa koracima jednakim vjerovatnoći diskretnih događaja

$$F_X(x) = P(X \le x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) h(X - x_i)$$

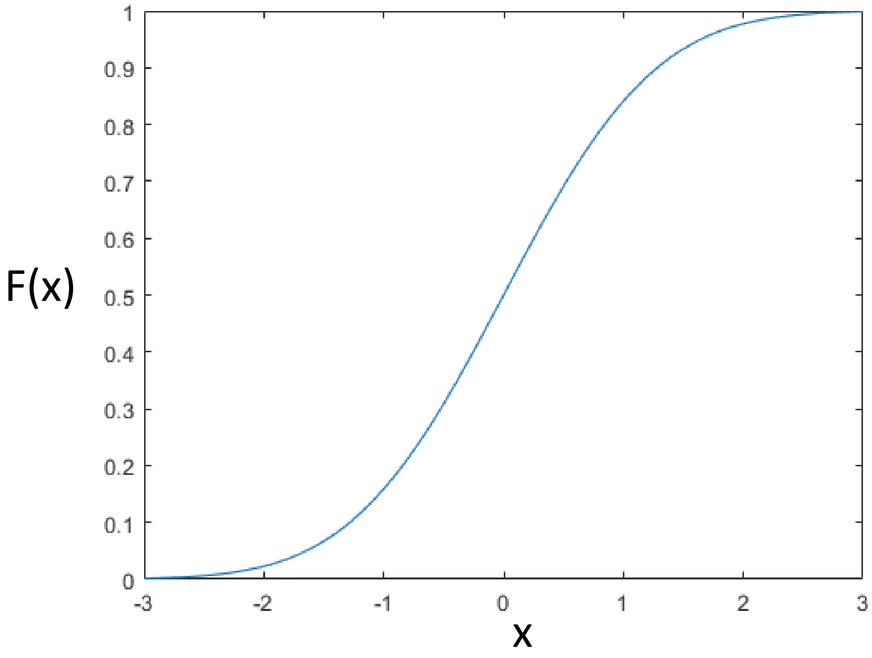
Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

CDF funkcija **diskretne** slučajne promjenjive



Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

CDF funkcija **kontinualne** slučajne promjenjive



Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

- Izračunavanje vjerovatnoće da se slučajna promjenljiva nalazi u opsegu:

$$\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$P\{X \leq x_2\} = P\{X \leq x_1\} + P\{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\}$$
$$= F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Funkcija gustine vjerovatnoće

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

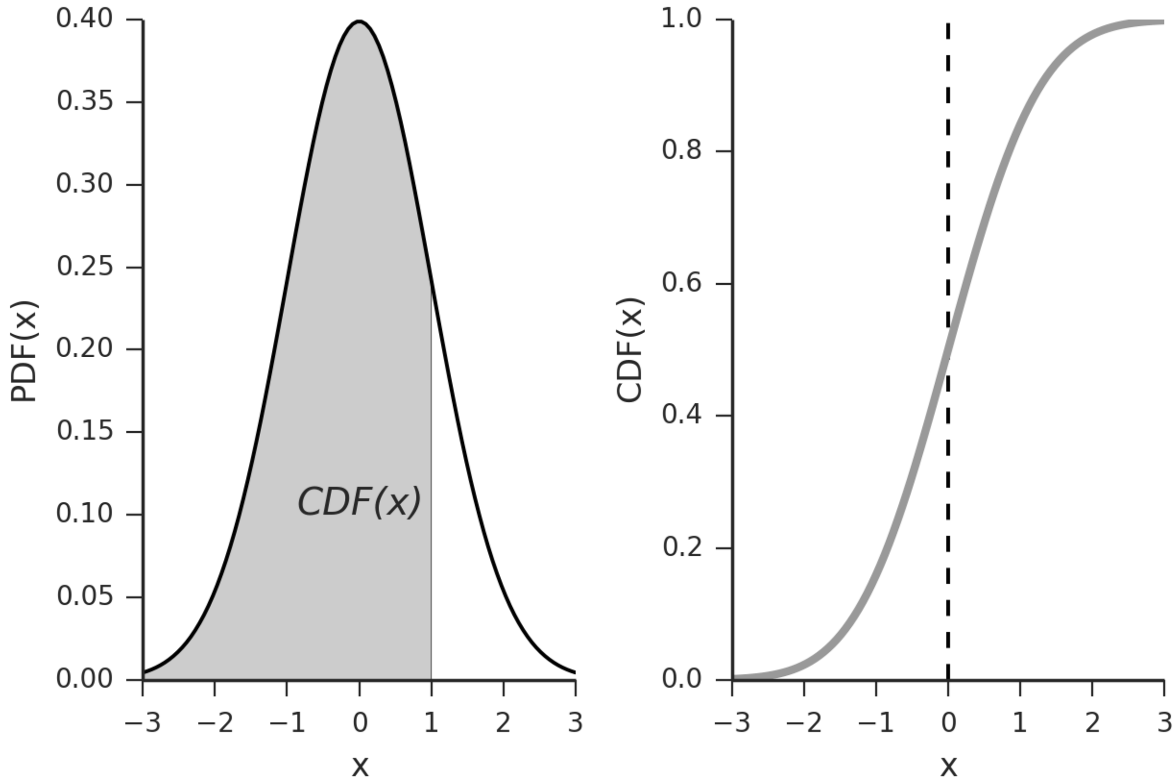
- $f_X(x) \geq 0$
- Dobijanje funkcije raspodjele iz $f_X(x)$: $\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = F(x)$
- Uslov normalizovanosti: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Vjerovatnoća i gustina:

  $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

  $$f(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx)$$

- Za diskretno X: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) \cdot \delta(x - x_i)$

Funkcija gustine vjerovatnoće



Združena raspodjela

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_{XY}(x,y) \Leftrightarrow F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y) dxdy$$

Marginalna raspodjela

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f_{XY}(x)\, dy$$

Statistički nezavisne slučajne promjenljive

$$f_{X_1, X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x)$$

$$F_{X_1, X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$$

Uslovna raspodjela

- Osobine uslovne raspodjele:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} F_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)dy$$

- **Primjer:** Neka je uslovna funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenjive X, za Y=y:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{x+y}{1+y} e^{-x}, \;\; 0 \leq x \leq \infty, \;\; 0 \leq y \leq \infty$$

Odrediti vjerovatnoću $P(X \leq 1|Y = 3)$.

Suma slučajnih promjenjivih

- Neka je Z= X + Y
  - CDF od Z:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}\,(x, y)dydy$$

  - PDF od Z:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)dx$$

  - Ukoliko su X i Y nezavisne slučajne promjenjive, onda važi:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

  - Za diskretne slučajne promjenjive: $P(Z=k) = \sum_i P(X=i)P(Y=k-i)$

Maksimum i minimum slučajnih promjenjivih

- Neka su slučajne promjenjive Q i W definisane na sledeći način:

$$Q = \max(X, Y) \qquad W = \min(X, Y)$$

- Tada važi:

$$F_Q(q) = P(Q \leq q) = P(X \leq q, Y \leq q)$$

Ako su X i Y nezavisne

$$F_Q(q) = P(X \leq q)P(Y \leq q) = F_X(q)F_Y(q)$$

$$F_W(w) = P(W \leq \mathrm{w}) = P(\{X \leq w\} \cup \{Y \leq w\})$$
$$= P(X \leq w) + P(Y \leq w) - P(\{X \leq w\} \cap \{Y \leq w\})$$

Ako su X i Y nezavisne

$$F_W(w) = F_X(w) + F_Y(w) - F_X(w)F_Y(w)$$

Poređenje slučajnih promjenjivih

- Tražimo vjerovanoću da je X>Y:

$$P(X > Y) = \int P(X > y | Y = y) f_Y(y) dy$$

Ako su X i Y nezavisne:

$$P(X > Y) = \int P(X > y) f_Y(y) dy$$

$$= \int (1 - F_X(y)) f_Y(y) dy$$